# Hertentamen Dynamische Systemen I, 16/08/2002.

1. Gegeven de afbeelding $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (-y+1+ax^2, x)$, met parameter $a > 0$.
   (a) Toon aan dat $F$ inverteerbaar is en bepaal de inverse.
   (b) Bepaal de vaste punten van dit systeem en hun stabiliteit, voor elke $a > 0$.
   (c) Teken een bifurcatiediagram, en benoem de lokale bifurcaties die je aantreft.

2. Gegeven de afbeelding $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$, $f(t) = 3t$, waarin $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$.
   (a) Bepaal de vaste punten en periode twee punten van $f$.
   (b) Is het vaste punt persistent onder voldoend kleine $C^\infty$ storingen $f + \varepsilon g$ van $f$? Beargumenteer je antwoord.
   (c) Bereken de Lyapunov-exponent van $f$, voor een willekeurig beginpunt $t \in \mathbb{S}^1$.
   (d) Voor willekeurige $k \in \mathbb{N}$, hoeveel punten van priemperiode (minimale periode) $k$ heeft $f$?
   (e) Bewijs dat de verzameling van periodieke punten dicht ligt in $\mathbb{S}^1$. (Aanwijzing: symbolische dynamica).
   (f) Construeer een chaotische baan van $f$ die niet dicht ligt.

3. Gegeven is het vectorveld

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \omega_1 \\ \dot{y} &= \omega_2, \end{aligned}$$

   gedefinieerd op de 2-torus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, met parameters $\omega_{1,2} > 0$.
   (a) Toon aan dat alle banen van dit vectorveld periodiek zijn als $\omega_1/\omega_2 \in \mathbb{Q}$.
   (b) Toon aan dat alle banen van dit vectorveld dicht liggen als $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{Q}$.

4. Zij $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ een $C^\infty$ diffeomorphisme, en $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ een $C^\infty$ afbeelding.

(a) Toon aan dat alle periodieke punten van de afbeelding $f$ minimale periode 1 of 2 hebben.

(b) Bewijs het volgende: als $f$ een punt van minimale periode 2 heeft, dan heeft $f$ precies één vast punt. Bovendien is dit punt persistent onder een storing $f + \varepsilon g$ van $f$, voor $|\varepsilon|$ voldoende klein ($\varepsilon \in \mathbb{R}$).